**Линейные однородные дифференциальные уравнения *n*-ого порядка с постоянными коэффициентами.**

*Линейным однородным дифференциальным уравнением n-ого порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида*

*http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image002.gif,*(1)

*где http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image004.gif- постоянные*, причем если http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image006.gifуравнение можно записать *в каноническом виде:*

http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image008.gif(2)

Будем искать решение уравнения (2) в виде http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image010.gif. Подставляя эту функцию в уравнение (2) получим:

http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image012.gif.

Сокращая на http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image014.gif, запишем

http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image016.gif. (3)

Выражение (3) называется характеристическим уравнением уравнения (2). Оно является алгебраическим уравнением *n*-ой степени и имеет *n* корней (в общем случае, комплексных).

Если все корни характеристического уравнения (3) действительные и различные числа http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image018.gif, то система решений http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image020.gifбудет линейно независимой, а общее решение уравнения (2) запишется в виде:

http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image022.gif, (4)

где http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image024.gif- произвольные константы.

*Пример.* Найти общее решение уравнения

http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image026.gif.

*Решение.*Характеристическое уравнение имеет вид:

http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image028.gif.

Найдем корни этого уравнения:

http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image030.gif, http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image032.gif,

откуда http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image034.gif, http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image036.gif, http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image038.gif.

Поскольку характеристическое уравнение имеет действительные различные корни, то общее решение дифференциального уравнения выглядит так:

http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image040.gif

или, подставив значения http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image042.gif,

http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image044.gif.

Если корни характеристического уравнения действительные, но среди них имеются кратные, то число различных корней меньше *n*, и число соответствующих им линейно-независимых решений вида http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image014.gifтоже меньше *n*. Тогда недостающие решения ищут в другом виде. Пусть, например, характеристическое уравнение имеет корень http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image046.gifкратности http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image048.gif.

Введем замену переменной http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image050.gif, где http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image052.gif- новая неизвестная функция. Найдем выражения производных функции http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image054.gifчерез производные функции http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image056.gif:

http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image058.gif,

http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image060.gif,

 …

http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image062.gif.

Подставив полученные значения в уравнение (2) и сократив на http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image064.gif, получим линейное однородное дифференциальное уравнение *n*-ого порядка с постоянными коэффициентами:

http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image066.gif, (5)

причем корни характеристического уравнения (3) отличаются от корней характеристического уравнения

http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image068.gif(6)

на слагаемое http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image070.gif, так как между решениями http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image010.gifи http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image073.gifдолжна быть зависимость: http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image075.gifили http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image077.gif, http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image079.gif.

Следовательно, корню http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image046.gifхарактеристического уравнения (3) соответствует корень http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image082.gifхарактеристического уравнения (6). При этом кратность корня http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image082.gifравнаhttp://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image048.gif. Это означает, что левая часть характеристического уравнения (6) имеет множительhttp://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image086.gifи, следовательно, http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image088.gif. Таким образом, характеристическое уравнение (6) имеет вид:

http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image090.gif, (7)

а исходное дифференциальное уравнение (5) вид:

http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image092.gif. (8)

Поскольку это уравнение не содержит производных порядка ниже *m*, то любой многочлен степени ниже *m* будет его решением. В частности, решениями уравнения (8) будут: 1, http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image094.gif,http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image096.gif, …, http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image098.gif, число которых равно кратности корня http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image082.gif. Таким образом, корню http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image082.gifбудут соответствовать решения:

http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image102.gif, http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image104.gif, http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image106.gif, …, http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image108.gif,

а в силу зависимости между http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image054.gifи http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image056.gif, http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image112.gif, для http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image114.gifполучаем решения:

http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image116.gif, http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image118.gif, http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image120.gif, …, http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image122.gif.

Получен следующий результат. Если действительный корень характеристического уравнения http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image124.gifимеет кратность http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image048.gif, то этому корню соответствует http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image048.gifлинейно независимых решений:

http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image126.gif, http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image128.gif, …, http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image130.gif(9)

*Пример.* Найти общее решение уравнения

http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image132.gif.

*Решение.*Составим и решим характеристическое уравнение:

http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image134.gif

http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image136.gif

http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image138.gif

http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image140.gif

http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image142.gif

http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image144.gif, http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image146.gif

Уравнение имеет корень http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image148.gifкратности два, поэтому линейно независимыми решениями уравнения будут:

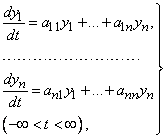
http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image150.gif, http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image152.gif, http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image154.gif.

Общим решением уравнения является линейная комбинация полученных решений:

http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/vmatem/semestr3/3.22.files/image156.gif.

**Общее решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.**

Будем искать решение линейной однородной системы с постоянными коэффициентами http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image001.gif

                                      (1)

или

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image003.gif,                                            (1’)

где http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image004.gif - заданная числовая [матрица](http://sernam.ru/lect_math1.php?id=5), в следующем виде:

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image005.gif,                              (2)

или

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image006.gif.                                              (2’)

Числа http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image007.gif подлежат определению.

Конечно, числа

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image008.gif

дают тривиальное решение системы (1):

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image009.gif.

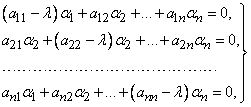
Но нас интересуют нетривиальные решения, соответствующие ну равным нулю векторам

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image010.gif.

Имеем

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image011.gif.

Подставляя функции http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image012.gif и их [производные](http://stu.sernam.ru/book_msh.php?id=117) в (1), после сокращения на http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image013.gif и переноса членов в одну сторону, получим

          (3)

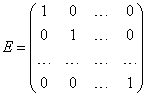
или в матричной форме

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image015.gif,                                             (3’)

или

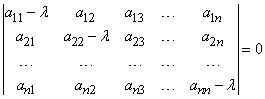
http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image016.gif,                                        (4)

где http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image010.gif, а



- [единичная матрица](http://sernam.ru/book_matrix.php?id=5).

Для того, чтобы система (3) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее [определитель](http://sernam.ru/book_e_math.php?id=96) был равен нулю:

                      (5)

Уравнение (5) называется [характеристическим уравнением](http://stu.sernam.ru/book_algebra.php?id=186) системы (1). Из уравнения (5) мы и находим те значенияhttp://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image019.gif, при которых система (4) имеет нетривиальные решения http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image020.gif.

Левая часть (5) есть [многочлен](http://edu.sernam.ru/book_m_cat.php?id=22) степени http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image021.gif по переменной http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image019.gif. С учетом кратности этот многочлен имеет http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image021.gif корней:

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image022.gif.                                   (6)

Если все http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image021.gif нулей различны, то, подставляя каждый из них http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image023.gif в систему (4) и решая ее, мы получим некоторый удовлетворяющий ей нетривиальный [вектор](http://sernam.ru/lect_math1.php?id=14)

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image024.gif.              (7)

Этот вектор определяется неоднозначно – с точностью из скалярного множителя.

Из (4) видно, что http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image025.gif являются [собственными значениями матрицы](http://edu.sernam.ru/book_kiber2.php?id=543) ([линейного преобразования](http://edu.sernam.ru/book_p_math2.php?id=173)) http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image026.gif, а векторы http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image027.gif - собственными векторами http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image026.gif.

Векторы http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image028.gif линейно независимы, если все [собственные значения](http://edu.alnam.ru/book_math_al_3.php?id=43) различны. Доказательство можно провести по индукции.

Докажем, что любые http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image029.gif векторов этой системы линейно независимы между собой.

Для http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image030.gif это очевидно, потому что каждый из векторов http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image031.gif не тривиален. Пусть наше утверждение верно для http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image032.gif векторов. Докажем его для http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image029.gif векторов.

Предположим противное. Пусть, например, первые http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image029.gif векторов нашей системы линейно зависимы. Тогда

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image033.gif,                              (8)

где хотя бы один из коэффициентов http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image034.gif отличен от нуля. Для определенности будет считать, что http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image035.gif. Применим[линейное преобразование](http://edu.sernam.ru/book_p_math2.php?id=173), порожденное матрицей http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image026.gif, к обеим частям (8):

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image036.gif.                       (9)

Умножая (8) на http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image037.gif и вычитая из (9), получаем

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image038.gif,

где http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image039.gif при всех http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image040.gif.

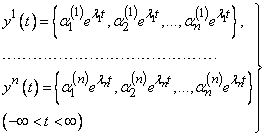
Значит, http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image041.gif, и мы получили, что векторы http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image042.gif линейно зависимы, что противоречит предположению.

Итак, собственные векторыhttp://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image043.gif, отвечающие различным собственным числам http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image025.gif, линейно независимы и [определитель](http://sernam.ru/book_e_math.php?id=96), составленный из координат этих векторов, не равен нулю:

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image044.gif.

Замечание 1. Так как в http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image021.gif- мерном пространстве не может быть больше чем http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image021.gif линейно независимых векторов, то каждому [собственному значению](http://edu.alnam.ru/book_math_al_3.php?id=43) http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image025.gif (если все они различны!) соответствует только один [собственный вектор](http://edu.alnam.ru/book_math_al_3.php?id=43) с точностью до постоянного множителя.

В результате получаем http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image021.gif вектор-функций  - решений системы (1)

                                     (10)